

Representación de Sistemas Dinámicos en Variables de Estados PS2315 "Sistemas" Versión 2

Prof. José Ferrer
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Abril-Julio 2012

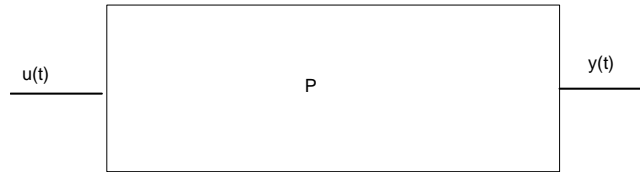
Abstract

En estas notas se presentan de una manera sencilla los conceptos fundamentales de la teoría de representación de sistemas dinámicos en variables de estados. Se introduce el concepto de variable de estados y algunas formas de representación frecuentemente empleadas. También se definen en términos de las matrices de un modelo en variables de estados, los conceptos de matriz controlabilidad, matriz de observabilidad, polos y ceros. Finalmente, queremos enfatizar la manera "particular" que presentamos este material que persigue tratar de generar una teoría general que integre los sistemas de tiempo continuo y los sistemas de tiempo discreto de una manera sencilla.

1 Representación en Espacio de Estados de Sistemas lineales

1.1 Introducción

Un ingeniero de control enfrenta problemas de optimización en todas las disciplinas de la ingeniería, ya sean ingenieros electrónicos, electricistas, mecánicos o químicos. En consecuencia, ella o el requiere aislar aquellos aspectos que son comunes a todas las diversas áreas a pesar que en los detalles difieran. Esto es hoy más que nunca necesario cuando existen tantos lenguajes de simulación (simulink, scicos, etc.) que forman parte esencial de cualquier proyecto de optimización. Para estos lenguajes de alto nivel no hay diferencia entre un automóvil



y un satélite artificial; las ecuaciones son similares aún si los parámetros son bastante diferentes. La teoría de sistemas de control surgió como un esfuerzo para proveer no solo un lenguaje unificado pero además metodologías generales para todos los problemas de optimización y simulación independientemente del área de aplicación. Incluso, tanto el lenguaje como las diferentes metodologías se aplican hoy en día en sistemas que pertenecen a áreas de las ciencias sociales, económicas y biológicas por ejemplo.

Para los estudiantes de ingeniería electrónica, química o eléctrica, resulta fácil entender el concepto de "sistema" es pensando en una caja negra con terminales, parte de los terminales son los terminales de entrada a los cuales se puede conectar una fuente de voltaje, corriente, o un torque o una fuerza mediante un actuador, El otro conjunto de terminales son los terminales de "salida" o las salidas de los sensores los cuales miden la actividad en el interior de la caja negra. La idea de la caja negra es que no sabemos precisamente que hay en el interior; y que en principio, toda la información que se requiere para optimizar el desempeño del sistema puede inferirse de la data generada por los sensores mediante una selección adecuada de las entradas.

Por lo arriba expresado, intuitivamente el sistema representado por una caja negra no es mas que el conjunto de todos los pares posibles

$$P = \{(u, y) \in U \times Y : y = P(u)\}$$

En otras palabras, un sistema P visto como una caja negra se representa mediante el siguiente gráfico

Se asume que las entradas u pertenecen a un conjunto de entradas admisibles U , mientras que la salida y es un elemento de un conjunto de salidas admisibles Y , en consecuencia, el sistema o planta P se representa como un operador

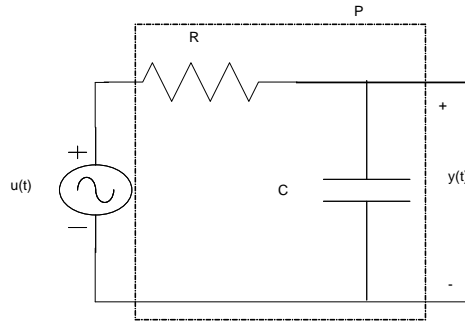
$$P : U \rightarrow T : u \rightarrow y = Pu \tag{1}$$

donde

$$y(\lambda) = [P(u)](\lambda), \forall \lambda \in T$$

Suponga que la planta es no-lineal, causal, de parámetros concentrados e inicialmente de tiempo continuo con $T = [0, \infty)$. Una vez que motivemos el concepto de estado, propondremos la correspondiente representación para sistemas de tiempo discreto.

Para ilustrar y motivar las ideas construyamos un modelo en caja negra. Para eso consideremos el sistema eléctrico mostrado en la figura



Lo que hay en el interior de la caja negra es un simple circuito $R - C$. La entrada es el voltaje $u(t)$, t denota el tiempo, que puede aplicarse mediante una fuente de voltaje, y la salida $y(t)$ es el voltaje en los terminales del condensador C . Supongamos que se almacenan todos los pares $(u(t), y(t))$ con $t \in (a, b)$. Queremos averiguar qué podemos decir sobre dichos pares en cualquier instante de tiempo $t \in (a, b)$.

Si nos aprovechamos de nuestro conocimiento sobre la estructura interna del sistema bajo estudio, de inmediato se obtiene de la aplicación del lema de voltajes de Kirchoff, la siguiente relación

$$u(t) = Ri(t) + v_c(t)$$

donde $i(t)$ representa la corriente en el lazo; mientras $v_c(t)$ denota el voltaje en los terminales del condensador C y el cual cumple con la relación constitutiva

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_c(t)$$

En consecuencia, tomando en cuenta que la salida $y(t) = v_c(t)$, se obtiene la siguiente relación entre la entrada y la salida de nuestro sistema

$$\frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

Y podemos decir entonces que el comportamiento externo (ya que solo involucra las variables de entrada y salida) de P está dada por

$$\left\{ (u, y) \in U \times Y : \frac{d}{dt} y(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t) \right\}$$

donde resulta conveniente seleccionar a los espacios de entradas y salidas admisibles como

$$\begin{aligned} U &= PW_{[0, \infty)} = \{f : [0, \infty) \rightarrow R, \text{ continua a trozos}\} \\ Y &= C_{[0, \infty)}^{(1)} = \{f : [0, \infty) \rightarrow R, \text{ diferenciable}\} \end{aligned}$$

y esta sería un modelo "entrada-salida" concreto para la representación abstracta

$$P : U \rightarrow T : u \rightarrow y = Pu$$

de la planta.

Sin embargo, es importante notar que el pleno conocimiento de la entrada $u(t)$ en un intervalo dado $(a, b) \subset [0, \infty)$ no permite determinar unívocamente la respuesta del sistema $y(t)$ ante tal entrada en el mencionado intervalo. De hecho, es posible que una misma entrada pueda generar distintas salidas. Para demostrar lo dicho, defina como factor de integración

$$\mu(t) = e^{\frac{1}{RC}t}$$

y multiplicando la ecuación entrada-salida de P por $\mu(t)$

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

se obtiene

$$e^{\frac{1}{RC}t} \frac{d}{dt}y(t) + e^{\frac{1}{RC}t} \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}u(t)$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{1}{RC}t}y(t) \right] = \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}u(t)$$

e integrando entre a y $t \geq a$,

$$\int_a^t \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{1}{RC}t}y(t) \right] dt = \int_a^t \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}\tau}u(\tau) d\tau$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{RC}t}y(t) \Big|_a^t &= e^{\frac{1}{RC}t}y(t) - e^{\frac{1}{RC}a}y(a) \\ &= \int_a^t \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}\tau}u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(t) = e^{-\frac{1}{RC}(t-a)}y(a) + \int_a^t \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}u(\tau) d\tau, t \geq a$$

y es evidente que es necesario conocer la condición inicial $y(a)$ para determinar unívocamente $y(t)$ en el intervalo (a, b) conocido el segmento

$$u_{(a,b)} = \{u(t) : t \in (a, b)\}$$

En este ejemplo, el estado del sistema está representado por el voltaje en el condensador, y su conocimiento en $t = a$, permite no solo calcular y sino además el mismo en valores posteriores de tiempo.

De lo arriba expuesto, se concluye sobre lo importante y necesario de poseer representaciones mas completas de la planta que permitan determinar con precisión cual será la respuesta del sistema P ante una entrada factible, conocida pero arbitraria. Esta representación es la de variables de estados y la cual describimos a continuación.

De ahora en adelante supondremos que P será una planta descrita por el operador

$$P : U \rightarrow T : u \rightarrow y = Pu \quad (2)$$

donde

$$y(\lambda) = [P(u)](\lambda), \forall \lambda \in T$$

y que esta, en general, es no-lineal, causal, de parámetros concentrados y eje de tiempo T .

Definición 1 *Dada una planta P dada por 2, sean $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$, un conjunto de n variables asociadas a P . Diremos que dichas variables son un conjunto de **variables de estados de la planta** dada si, y solo si, para un cierto $\lambda_0 \in T$ se tiene que conociendo; a) los valores iniciales $x_1(\lambda_0), x_2(\lambda_0), \dots, x_n(\lambda_0)$, y b) la señal de entrada $u(\lambda)$ para $\lambda \geq \lambda_0$, se puede determinar unívocamente la trayectoria futura de estado del sistema $x(\lambda), \lambda \geq \lambda_0$ conjuntamente con la señal respuesta o salida del sistema $y(\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$.*

Una vez asignadas n variables como las componentes o variables de estados de la planta P , se define como vector de estado del sistema a $x(\lambda) = [x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda)]^{Tr}$, (la operación Tr es la conocida operación de transposición matricial). Mas aún, al entero positivo n que representa el número de variables de estados se le denomina **orden o dimensión** del sistema P .

Lo que se asigna como vector de estado a un sistema dado, puede corresponder al uso de cantidades físicas bien definidas (voltajes, corrientes, velocidades, posiciones, etc) o consecuencia de otras consideraciones (además de las físicas) tales como las consideradas en el cálculo o solución de las ecuaciones dinámicas del sistema. Por ejemplo, para sistemas mecánicos se sabe que al conocer las velocidades de las masas y las posiciones de los resortes en una red mecánica en un instante de tiempo dado, es posible predecir el comportamiento futuro del sistema mecánico dado sin recurrir a información mas anterior a la considerada. Las velocidades de las masas y las posiciones de los resortes constituyen el estado del sistema bajo estudio. Las leyes de Newton permiten determinar la evolución del estado. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2 (*ver⁽¹⁾*). *Considere la planta P : "Satélite en órbita con la Tierra" de tiempo continuo mostrada en la figura (1). Se supone que la masa del satélite, m , será constante bajo la acción de la fuerza de gravedad de la tierra. El planeta es una esfera homogénea que gira a una velocidad angular constante ω , y su centro es un punto fijo en el espacio. El problema de control consiste en mantener al satélite en una órbita circular sobre una posición deseada, definida por la distancia del centro de la tierra al satélite r , sujeta a todas las perturbaciones que tienden a mover al satélite fuera de la trayectoria establecida. Esto*

es se buscan torques T_r y T_θ tal que el radio $r(t)$ del satélite sea constante y $\theta(t) \rightarrow \omega t$ donde ω representa la velocidad angular de la tierra y θ es el ángulo del satélite a partir de la dirección de una línea base fija (la línea horizontal punteada de la figura).

En la figura se muestran los vectores unitarios $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ y \vec{e}_z (este último en dirección saliendo del papel que coincide con el polo norte de la tierra) que definen los ejes de coordenadas

El vector de posición para el satélite está dada por

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$$

y la velocidad angular del sistema giratorio es

$$\vec{W}(t) = \left(\frac{d}{dt}\theta \right) \vec{e}_r$$

Es posible demostrar aplicando las leyes de Newton en las direcciones r y θ que las ecuaciones de movimiento del satélite son

$$\begin{aligned} m \left[\frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right] &= T_r(t) - \frac{\mu M m}{r^2(t)} \\ m \left[r(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} \right] &= T_\theta(t) \end{aligned}$$

donde μ es la constante de gravitación universal.

Defina como variables de estados

$$x_1(t) = r(t); \quad x_2(t) = \frac{dr(t)}{dt}; \quad x_3(t) = \theta(t) - \omega t; \quad x_4(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3)$$

las entradas al sistema se tomarán como

$$u_1(t) = \frac{T_r(t)}{m}; \quad u_2(t) = \frac{T_\theta(t)}{m}$$

En consecuencia las ecuaciones de estados de la planta serán

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) &= f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) x_4^2(t) + \frac{\mu M m}{x_1^2(t)} + u_1(t) &= f_2(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) - \omega &= f_3(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= -\frac{2x_2(t)x_4(t)}{x_1(t)} + \frac{u_2(t)}{x_1(t)} &= f_4(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de estados para dicho sistema puede resumirse como

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

donde

$$\begin{aligned} x(t)^{Tr} &= \left[r(t); \quad \frac{dr(t)}{dt}; \quad \theta(t) - \omega t; \quad \frac{d\theta(t)}{dt} \right] \\ u(t)^{Tr} &= \left[\frac{T_r(t)}{m}; \quad \frac{T_\theta(t)}{m} \right] \end{aligned}$$

Ahora supóngase que se utiliza un radar para hacer las mediciones. En general, se podrá medir solamente una parte del estado a algunas funciones que involucren solo parte del estado. Suponga que solo se puede medir r y $\theta - \omega t$ y que las mediciones son exactas; entonces, las ecuaciones de salida del sistema son

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) = g_1(x(t), u(t)) \\ y_2(t) &= x_3(t) = g_1(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

O sea,

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

En general, se supone que el conjunto (o espacio normado) de entradas que se aplicarán a la planta es

$$U = \left\{ u \in L_2[0, \infty) : \|u\|_2 \leq \frac{T_{\max}}{m} \right\}$$

donde T_{\max} es magnitud máxima torque que puede soportar el satélite, y

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\} dt}$$

En este caso, las variables de estados $x_1(t)$, $x_2(t)$; $x_3(t)$ y $x_4(t)$ empleadas (ver (3)) tienen un significado físico definido, ya que cada una de ellas representa una variable física relevante a la representación dinámica de la planta considerada.

Ejemplo 3 Considere un sistema de tiempo discreto P :

$$\begin{aligned} P &: U \rightarrow Y \\ y(k) &= [Pu](k) \end{aligned}$$

cuya salida $y(k)$ es igual a la diferencia entre el máximo y el mínimo de los valores de la entrada recibido hasta el instante k . Por lo tanto

$$y(k) = \max_{\tau \leq k} u(\tau) - \min_{\tau \leq k} u(\tau)$$

Es evidente que el sistema no es algebraico y, por lo tanto, es dinámico o con memoria "generalizada". ¿ Cuánta información de los valores pasados de la entrada debemos o el sistema debe almacenar para determinar o generar la salida y en el instante $k \in Z$? Para eso defina para cada $k \in Z$:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max \{u(\tau) : \tau \leq k - 1\} \\ x_2(k) &= \min \{u(\tau) : \tau \leq k - 1\} \end{aligned}$$

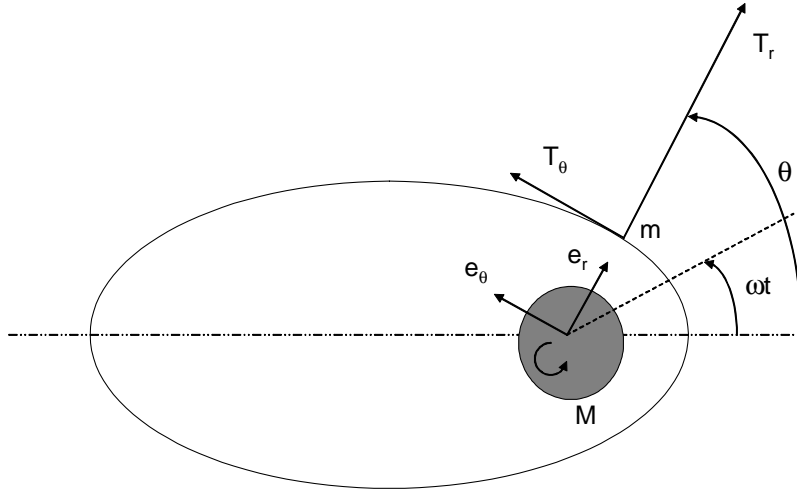


Figure 1: Satélite en órbita con la Tierra

Po lo tanto,

$$y(k) = \max \{x_1(k), u(k)\} - \min \{x_2(k), u(k)\}$$

De inmediato concluimos que para generar $y(k)$, y $\{x_1(k+1), x_2(k+1)\}$ unívocamente sólo es necesario almacenar $\{x_1(k), x_2(k)\}$ y conocer $u(k)$. Por lo tanto:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \in R^2$$

califica como un vector de estados asociado a P , en cuyo caso:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max \{x_1(k), u(k)\} \\ \min \{x_2(k), u(k)\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x(k), u(k)) \\ f_2(x(k), u(k)) \end{bmatrix} = f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= \max \{x_1(k), u(k)\} - \min \{x_2(k), u(k)\} = g(x(k), u(k)) \end{aligned}$$

Claramente en este ejemplo,

$$U = \{u \in S_e : \|u\|_\infty < \infty\}$$

es un espacio adecuado para el conjunto de entradas factibles al sistema P bajo estudio.

Si para una planta dada P

$$\begin{aligned} P &: U \rightarrow Y \\ y(\lambda) &= [Pu](\lambda), \lambda \in T \end{aligned}$$

se encuentra un vector de estados $x(\lambda)$ el cual cumple con las hipótesis arriba exigidas, entonces uno de los modelos en variables de estados posible para representar un sistema no-lineal como P es

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= f(x(\lambda), u(\lambda), \lambda) \\ y(\lambda) &= g(x(\lambda), u(\lambda), \lambda)\end{aligned}\tag{4}$$

con

$$\sigma = \begin{cases} \frac{d}{dt}, & \lambda = t \\ q^1, & \lambda = k. \end{cases}$$

donde

- $T =$ eje o base de tiempo asociado a P .
- $\forall \lambda \in T, x(\lambda) \in R^n$ es el estado de la planta en el instante λ , y n representa la dimensión de P (número de variables de estados)
- $\forall \lambda \in T, u(\lambda) \in R^{n_u}$ es la entrada o ley de control de la planta en el instante λ , con n_u es el número de entradas o dimensión de u .
- $\forall \lambda \in T, y(\lambda) \in R^{n_y}$ es la salida o variable controlada de la planta en el instante λ , con n_y es el número de salidas o dimensión de y .
- $f : R^n \times R^{n_u} \times T \rightarrow R^n$
- $g : R^n \times R^{n_u} \times T \rightarrow R^{n_y}$

La relación $\sigma x(\lambda) = f(x(\lambda), u(\lambda), \lambda)$ se le denomina **ecuación de estado**, mientras que a $y(\lambda) = g(x(\lambda), u(\lambda), \lambda)$ se le conoce como **ecuación de salida** de la planta.

Es interesante observar que las ecuaciones de estados de un sistema dado P , (4), representan un conjunto de ecuaciones diferenciales/diferencias de primer orden. Este tipo de modelo no es nada restrictivo, ya que si sucede que la planta P está descrita por una ecuación diferencial/diferencias escalar de orden n como la que se muestra a continuación

$$\sigma^n y(\lambda) = \Psi(y(\lambda), \sigma y(\lambda), \dots, \sigma^{n-1} y(\lambda), u(\lambda), \lambda)\tag{5}$$

entonces, manipulando dicha relación es posible transformarla en la forma (4). Para eso defina:

$$x_1(\lambda) = y(\lambda), \quad x_2(\lambda) = \sigma y(\lambda), \quad \dots, \quad x_n(\lambda) = \sigma^{n-1} y(\lambda)$$

y se tiene que (5) es equivalente a

$$\begin{aligned}\sigma x_1(\lambda) &= x_2(\lambda) \\ \sigma x_2(\lambda) &= x_3(\lambda) \\ &\vdots \\ \sigma x_{n-1}(\lambda) &= x_n(\lambda) \\ \sigma x_n(\lambda) &= \Psi(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda), u(\lambda), \lambda)\end{aligned}$$

Y observe que dichas relaciones coincide con (4) si se toma

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= [x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda)]^{Tr} \\ f(x(\lambda), u(\lambda), \lambda) &= [x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda), \Psi(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_n(\lambda), u(\lambda), \lambda)]^{Tr} \end{aligned}$$

Ejemplo 4 (Sistemas Robóticos) Las ecuaciones dinámicas que describen un robot rígido es

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (6)$$

donde $M(q)$ es una matriz de inercia $n \times n$, q y sus derivadas son vectores de dimensión $n \times 1$ de coordenadas generalizadas, y $V(q, \dot{q})$, $G(q)$ y τ son vectores de dimensión $n \times 1$ que contienen los torques dependientes de velocidades, los torques de gravedad, y los torques de entrada respectivamente.

Suponga que se define como vector de estados

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \in R^{2n}, \\ x^{(1)}(t) &\in R^n, x^{(2)}(t) \in R^n \end{aligned} \quad (7)$$

y que el vector de entrada es $u(t) = \tau(t)$, y que la salida de este sistema es $y(t) = q(t)$. Ahora bien, es posible demostrar que todos los sistemas robóticos son tales que la matriz de inercias $M(q(t))$ es invertible para todo t . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ -M^{-1}(q(t)) [V(q(t), \dot{q}(t)) + G(q(t))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q(t)) \end{bmatrix} \tau(t) \\ y(t) &= [I_n, 0] \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Finalmente, usando la definición 7 se puede expresar 8 como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ -M^{-1}(x^{(1)}) [V(x^{(1)}, x^{(2)}) + Gx^{(1)}] + M^{-1}(x^{(1)}) u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t)) \\ f_1(x(t), u(t)) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

donde

- $f_1(x(t), u(t)) = x^{(2)}$ y
- $f_1(x(t), u(t)) = -M^{-1}(x^{(1)}) [V(x^{(1)}, x^{(2)}) + Gx^{(1)}] + M^{-1}(x^{(1)}) u$

Mientras que la ecuación de salida será

$$y(t) = [I_n, 0]x(t) = g(x(t), u(t)) \quad (10)$$

Por lo tanto, mediante las relaciones 9 y 10 hemos obtenido un modelo de 6 de la forma mostrada en 4

Teorema 5 Sea P una planta con base de tiempo T , dimensión finita y causal descrita por las ecuaciones de estados (4). Si P es lineal, entonces el mencionado modelo se convierte en

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= A(\lambda)x(\lambda) + B(\lambda)u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C(\lambda)x(\lambda) + D(\lambda)u(\lambda)\end{aligned}$$

donde para todo $\lambda \in T_+$, $A(\lambda) \in R^{n \times n}$, $B(\lambda) \in R^{n \times n_u}$, $C(\lambda) \in R^{n_y \times n}$, $D(\lambda) \in R^{n_y \times n_u}$, con n la dimensión del sistema.

A continuación presentamos otro ejemplo sencillo que permite ilustrar la manera en que se seleccionan las variables de estados.

Ejemplo 6 Sea P una planta con base de tiempo T , escalar, de parámetros concentrados, con entrada $u \in U = \{u \in L_2[0, +\infty) : \frac{d^i}{dt^i}u \text{ existen para } i = 1, 2, \dots, m\}$. de ser el sistema de tiempo continuo; sin embargo, si este es de tiempo discreto sólo necesitamos pedir que $U = S_e$. Suponga que P está descrito por la ecuación Entrada/Salida siguiente:

$$\sigma^n y(\lambda) + a_{n-1}\sigma^{n-1}y(\lambda) + \dots + a_0y(\lambda) = b_m\sigma^m u(\lambda) + \dots + b_0u(\lambda)$$

o

$$\underbrace{[\sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \dots + a_0]}_{D(\sigma)}y(\lambda) = \underbrace{[\sigma^m + b_{m-1}\sigma^{m-1} + \dots + b_0]}_{N(\sigma)}u(\lambda)$$

$$\text{donde } \sigma = \begin{cases} \frac{d}{dt}, & \lambda = t \\ q^{-1}, & \lambda = k. \end{cases}$$

Ahora, recordando que para resolver una ecuación diferencial/diferencia de orden n , o sea, para calcular $y(\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, dado $u(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0$, se requieren n -condiciones iniciales (CI's). Generalmente dichas CI's son

$$y(\lambda_0), \sigma y(\lambda_0), \dots, \sigma^{n-1}y(\lambda_0) \quad (11)$$

Por lo tanto, si se definen

$$\begin{aligned}x_1(\lambda_0) &= y(\lambda_0) \\ x_2(\lambda_0) &= \sigma y(\lambda_0) \\ &\vdots \\ x_n(\lambda_0) &= \sigma^{n-1}y(\lambda_0)\end{aligned}$$

se observa de inmediato, que conociendo $x(\lambda_0) = (x_1(\lambda_0), x_2(\lambda_0), \dots, x_n(\lambda_0))^{Tr}$ (las CI's, ?? conjuntamente con el segmento de entrada $\{u(\lambda) : \lambda \geq \lambda_0\}$, es suficiente para determinar $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. En otras palabras, $x(\lambda) = (y(\lambda), \sigma y(\lambda), \dots, \sigma^{n-1}y(\lambda))^{Tr}$ califica como vector de estado de la planta P dada. Mas aún, las variables de estados seleccionadas de esta manera se conocen con el nombre de variables de fase.

Sea P una planta con base de tiempo T , dimensión finita, causal e invariante en el tiempo descrita por las ecuaciones de estados (4). Si P es lineal, entonces el mencionado modelo se convierte en

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda)\end{aligned}\tag{12}$$

donde para todo $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times n_u}, C \in R^{n_y \times n}, D \in R^{n_y \times n_u}$, con n la dimensión del sistema. En cuyo caso expresaremos (12) usando la siguiente estructura de datos:

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n,x}$$

Más adelante explicaremos cómo obtener modelos en variables de estado tanto para sistemas de tiempo continuo como para sistemas de tiempo discreto. Para estos últimos, específicamente, nos concentraremos en los sistemas de datos muestreados, o sea, aquellos sistemas de tiempo discreto que se obtienen mediante la discretización o muestreo de sistemas de tiempo continuo.

Ejemplo 7 *Considere una planta P de tiempo discreto, escalar e invariante en el tiempo descrita por la ecuación de diferencias*

$$y(k+3) + 4y(k+2) - 3y(k+1) + 0.5y(k) = u(k)$$

con $k \in Z_{\geq 0}$. Es evidente que tener conocimiento pleno de la entrada $u(k)$ para $k \in Z_{\geq 0}$, no es suficiente para calcular la salida unívocamente. Para eso es necesario, conocer las condiciones iniciales

$$y(0), y(1), y(2)$$

conocidas.

Importante observar que el sistema P estaría descrita por

$$[\sigma^3 + 4\sigma^2 - 3\sigma + 0.5] y(k) = u(k)$$

con condiciones iniciales

$$y(0), \sigma y(0), \sigma^2 y(0)$$

dadas y donde $\sigma = q^1$.

En consecuencia, postulamos como variables de estados a

$$\begin{aligned}x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= y(k+1) = \sigma y(k) \\ x_3(k) &= y(k+2) = \sigma^2 y(k)\end{aligned}$$

y vemos que

$$\begin{aligned}\sigma x_1(k) &= x_1(k+1) = x_2(k) \\ \sigma x_2(k) &= x_2(k+1) = x_3(k) \\ \sigma x_3(k) &= x_3(k+1) = -0.5x_1(k) + 3x_2(k) - 4x_3(k) + 2u(k)\end{aligned}$$

mientras que la salida

$$y(k) = x_1(k)$$

Por lo tanto, un modelo en variables de estados para P es

$$\begin{aligned} \sigma x(k) &= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(k) \end{aligned} \quad (13)$$

Ejemplo 8 Para resaltar la similitud de los sistemas de tiempo continuo y de los de tiempo discreto, considere el sistema P de tiempo continuo descrito por la ecuación diferencial de E/S

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 4\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}3y(t) + 0.5y(t) = u(t)$$

con $t \in R_{\geq 0}$. Es evidente que tener conocimiento pleno de la entrada $u(t)$ para $t \in R_{\geq 0}$, no es suficiente para calcular la salida unívocamente. Para eso es necesario, conocer las condiciones iniciales

$$y(0), \frac{d}{dt}y(0), \frac{d^2}{dt^2}y(0)$$

Importante observar que el sistema P estaría descrita por

$$[\sigma^3 + 4\sigma^2 - 3\sigma + 0.5] y(t) = u(t)$$

con condiciones iniciales

$$y(0), \sigma y(0), \sigma^2 y(0)$$

dadas y donde $\sigma = \frac{d}{dt}$. En consecuencia, postulamos como variables de estados a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{d}{dt}y(t) = \sigma y(t) \\ x_3(t) &= \frac{d^2}{dt^2}y(t) = \sigma^2 y(t) \end{aligned}$$

y vemos que

$$\begin{aligned} \sigma x_1(t) &= \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \sigma x_2(t) &= \frac{d}{dt}x_2(t) = x_3(t) \\ \sigma x_3(t) &= \frac{d}{dt}x_3(t) = -0.5x_1(t) + 3x_2(t) - 4x_3(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

mientras que la salida

$$y(t) = x_1(t)$$

Por lo tanto, un modelo en variables de estados para P es

$$\begin{aligned} \sigma x(t) &= \begin{bmatrix} \sigma x_1(t) \\ \sigma x_2(t) \\ \sigma x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (14) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u(t) \end{aligned}$$

Para reafirmar la necesidad de hacer análisis integrados de los sistemas de tiempos continuos y aquellos de tiempo discreto, como también justificar nuestra metodología, compare los resultados mostrados en (13) y (14). Por lo tanto, ¿Por qué no economizar esfuerzo y/o explotar las similitudes de esas dos clases de sistemas?.

2 Representación de Sistemas mediante las Variables de Fase

En algunos ejemplos mostrados en estas notas se ha demostrado que la selección de las variables de estados para una planta P dada. Ahora bien, el objetivo de esta sección es la de mostrar otra manera de definir el vector de estado de una planta. Específicamente, esto se hará mediante el método de variables de fase (método original empleado en mecánica racional y mecánica cuántica y que motivó el concepto de estado en el estudio de sistemas dinámicos).

Si bien el método de variables físicas tiene la ventaja de darle al estado un significado muy práctico y concreto. Las variables de fase son una clase particular de variables de estados que consisten en una variable y sus derivadas.

Suponga que se tiene una planta escalar P con entrada $u(\cdot) \in U$ y salida $y(\cdot) \in Y$ y base de tiempo T , descrito por la ecuación Entrada-Salida

$$D(\sigma)y(\lambda) = N(\sigma)u(\lambda)$$

donde

$$\begin{aligned} D(\sigma) &= \sigma^n + \alpha_{n-1}\sigma^{n-1} + \dots + \alpha_1\sigma + \alpha_0 \in R[\sigma] \\ N(\sigma) &= 1 \in R[\sigma] \end{aligned}$$

Para expresar dicha ecuación entrada/salida en variables de fase defina las

componentes del vector de estado como

$$\begin{aligned}
 x_1(\lambda) &= \sigma^0 y(\lambda) = y(\lambda) \\
 x_2(\lambda) &= \sigma y(\lambda) = \dot{y}(\lambda) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(\lambda) &= \sigma^{n-2} y(\lambda) = y^{(n-2)}(\lambda) \\
 x_n(\lambda) &= \sigma^{n-1} y(\lambda) = y^{(n-1)}(\lambda)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \sigma x_1(\lambda) &= x_2(\lambda) \\
 \sigma x_2(\lambda) &= x_3(\lambda) \\
 &\vdots \\
 \sigma x_n(\lambda) &= -\alpha_0 x_1(\lambda) - \alpha_1 x_2(\lambda) - \dots - \alpha_{n-1} x_n(\lambda) + u(\lambda) \\
 y(\lambda) &= x_1(\lambda)
 \end{aligned}$$

En términos matriciales, las ecuaciones de estados en variables de fase se convierte en

$$\begin{aligned}
 \sigma x(\lambda) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x(\lambda) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\lambda) \\
 y(\lambda) &= [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] x(\lambda) + [0] u(\lambda)
 \end{aligned}$$

Considere ahora el caso mas general; o sea,

$$D(\sigma) y(\lambda) = N(\sigma) u(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
 D(\sigma) &= \sigma^n + \alpha_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + \alpha_1 \sigma + \alpha_0 \\
 N(\sigma) &= \beta_n \sigma^n + \beta_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + \beta_1 \sigma + \beta_0
 \end{aligned}$$

donde $\beta_n \neq 0$.

En primer lugar, mediante división de polinomios exprese

$$\begin{aligned}
 \frac{N(\sigma)}{D(\sigma)} &= \beta_n + \frac{c_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + c_1 \sigma + c_0}{D(\sigma)} \\
 &= \beta_n + \frac{N_r(\sigma)}{D(\sigma)}
 \end{aligned}$$

Introduciendo una variable intermedia (denominada pseudo-estado) $\zeta(\lambda)$ tal que

$$\begin{aligned}
 D(\sigma) \zeta(\lambda) &= u(\lambda) \\
 y(\lambda) &= N_r(\sigma) \zeta(\lambda) + \beta_n u(\lambda)
 \end{aligned} \tag{15}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
y(\lambda) &= N_r(\sigma)\zeta(\lambda) + \beta_n u(\lambda) \\
&= N_r(\sigma)D^{-1}(\sigma)u(\lambda) + \beta_n u(\lambda) \\
&= [N_r(\sigma)D^{-1}(\sigma) + \beta_n]u(\lambda) \\
&= \frac{N(\sigma)}{D(\sigma)}u(\lambda)
\end{aligned}$$

En otras palabras, las relaciones (15) son equivalentes a la ecuación entrada/salida de la planta P .

Por otro lado, la ecuación $D(\sigma)\zeta(\lambda) = u(\lambda)$ puede expresarse en variables de estados de fase como

$$\sigma x(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x(\lambda) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\lambda)$$

ya que es precisamente el caso que se consideró inicialmente, donde $\zeta(\lambda) = x_1(\lambda)$, $\sigma\zeta(\lambda) = x_2(\lambda)$, \dots , $x_n(\lambda) = \sigma^{n-1}\zeta(\lambda)$.

En consecuencia, la ecuación de salida

$$\begin{aligned}
y(\lambda) &= N_r(\sigma)\zeta(\lambda) + \beta_n u(\lambda) \\
&= (c_{n-1}\sigma^{n-1} + \dots + c_1\sigma + c_0)\zeta(\lambda) + \beta_n u(\lambda)
\end{aligned}$$

puede representarse en término de las variables de estados de fase como

$$\begin{aligned}
y(\lambda) &= c_0x_1(\lambda) + c_1x_2(\lambda) + \dots + c_{n-1}x_n(\lambda) + \beta_n u(\lambda) \\
&= [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}]x(\lambda) + [\beta_n]u(\lambda)
\end{aligned}$$

Por o tanto, la representación en variables de fase del sistema descrito por $D(\sigma)y(\lambda) = N(\sigma)u(\lambda)$, es

$$\begin{aligned}
\sigma x(\lambda) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x(\lambda) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\lambda) \\
y(\lambda) &= [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1}]x(\lambda) + [\beta_n]u(\lambda)
\end{aligned}$$

Ejemplo 9 Considere el sistema electromecánico "motor DC controlado por campo" cuyas ecuaciones fundamentales (ver (??)) son

$$\begin{aligned}
V_f(t) &= R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \\
T_m(t) &= K_T i_f(t) \\
T_m(t) &= J_L \frac{d}{dt}\omega(t) + M\omega(t) + T_L(t)
\end{aligned}$$

Suponga que no existe torque de carga, $T_L(t) = 0$. Entonces, el comportamiento dinámico del motor está determinado por las ecuaciones fundamentales

$$\begin{aligned} [R_f + L_f p] i_f(t) &= V_f(t) \\ T_m(t) &= K_T i_f(t) \\ [J_L p^2 + M p] \theta(t) &= T_m(t) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{1}{[J_L p^2 + M p]} T_m(t) \\ &= \frac{1}{[J_L p^2 + M p]} K_T i_f(t) \\ &= \frac{1}{[J_L p^2 + M p]} K_T \frac{1}{[R_f + L_f p]} V_f(t) \end{aligned}$$

Esto es

$$(J_L p^2 + M p) (R_f + L_f p) \theta(t) = K_T V_f(t)$$

Ya que $u(t) = V_f(t)$ e $y(t) = \theta(t)$, se tiene que la ecuación entrada/salida de dicho sistema es

$$[J_L L_f p^3 + (L_f M + R_f J_L) p^2 + R_f M p] y(t) = K_T u(t)$$

y normalizando (dividiendo ambos lados por $J_L L$) se obtiene

$$\underbrace{\left[p^3 + \frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} p^2 + \frac{R_f M}{J_L L_f} p \right]}_{D(p)} y(t) = \underbrace{\frac{K_T}{J_L L_f}}_{N(p)} u(t)$$

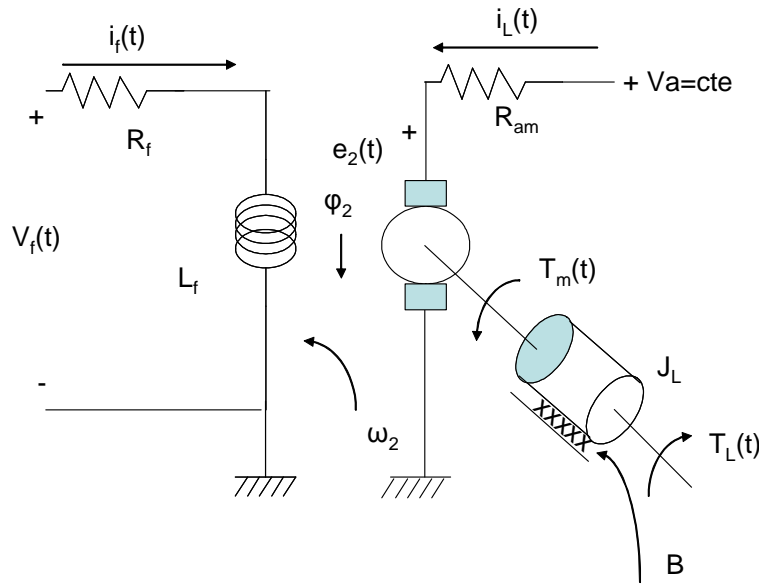
Finalmente la representación en variable de fase para dicho sistema será

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_f M}{J_L L_f} & -\frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_T}{J_L L_f} & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

3 Representaciones Similares o Algebraicamente equivalentes

Dada una planta P de tiempo continuo, con entrada $u \in U$ y salida $y \in Y$, entonces se sabe que dicho sistema puede representarse internamente mediante un modelo en variables de estados dado por

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= f(x(\lambda), u(\lambda)) \\ y(\lambda) &= g(x(\lambda), u(\lambda)) \end{aligned}$$



pero la selección del un vector de estado x es bastante arbitrario, siendo la única condición impuesta hasta ahora la exigida por la definición misma de estado.

Específicamente, se sabe que existen diversas maneras de asociar variables de estados a un sistema o planta dada P . Uno de ellos es la asignación de variables de estados mediante el método de variables físicas, o sea, a cada elemento almacenados de energía que constituye el sistema se le asocia una variable. Mas concretamente, por cada elemento almacenador de esfuerzo o elemento capacitivo se define como variable de estado a la variable de esfuerzo asociada a él; mientras que a cada elemento almacenador de flujo, elemento inductivo, se define como variable de estados a la variable de flujo asociada. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dim(x) &= \text{nro. de variables de estados} \\ &\simeq \text{nro. de elementos almacenadores de energía} \end{aligned}$$

Sin embargo, debe aclararse que esto es solo una guía (en la práctica pueden ser de un mayor o menor número dependiendo de la topología de la planta bajo estudio).

Por otro lado, existe otro método de asignación de variables de estados mediante las llamadas variables de fase, y las cuales en el caso de plantas escalares generan representaciones o modelos de estructura muy particular, denominadas representaciones canónicas. Como ejemplo de dichas representaciones canónicas se tienen las formas de controlabilidad, observabilidad y de Jordan que se estudiarán más adelante.

De lo anterior debe tenerse en claro que no existe una selección única de las variables de estados para una planta dada.

Lo anterior motiva la siguiente pregunta: ¿Qué relación existe entre dos representaciones en variables de estados cualesquiera de una misma planta?. Una respuesta satisfactoria a tal pregunta no es fácil en general, y trae interesantes consecuencias en la teoría y práctica de los sistemas de control.

Sin embargo, suponga que la planta bajo estudio es lineal, contante en el tiempo y continua, y que está descrita por

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda)\end{aligned}$$

donde $\dim x = n$

Cuando una matriz real, Q , de dimensión $n \times n$ es invertible ($\det(Q) \neq 0$), entonces se escribirá

$$Q \in GL_n(\mathbb{R})$$

Definamos un nuevo vector $\zeta(\lambda) = Qx(\lambda) \in \mathbb{R}^n$. Y de inmediato observamos que los vectores x y ζ tienen idéntico contenido informacional sobre el comportamiento interno del sistema P , hecho que a su vez implica que ζ califica como un vector de estado para la planta P . Como consecuencia, debe existir una representación de la planta P dada por

$$\begin{aligned}\sigma \zeta(\lambda) &= \hat{A}\zeta(\lambda) + \hat{B}u(\lambda) \\ y(\lambda) &= \hat{C}\zeta(\lambda) + \hat{D}u(\lambda)\end{aligned}$$

Mas concretamente:

$$\begin{aligned}\sigma \zeta(\lambda) &= Q\sigma x(\lambda) = Q(Ax(\lambda) + Bu(\lambda)) \\ &= QA x(\lambda) + QB u(\lambda) \\ &= \underbrace{QAQ^{-1}}_{\hat{A}} \zeta(\lambda) + \underbrace{QB}_{\hat{B}} u(\lambda)\end{aligned}$$

Mientras que la ecuación de salida surge de:

$$\begin{aligned}y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda) \\ &= \underbrace{CQ^{-1}}_{\hat{C}} \zeta(\lambda) + \underbrace{D}_{\hat{D}} u(\lambda)\end{aligned}$$

Por la tanto se motiva el siguiente concepto.

Comentario 10 *Sobre los espacios de entrada y salida: Si el sistema bajo estudio es: a) de tiempo continuo asumiremos que*

$$\begin{aligned}U &= L_p^{n_u}[0, \infty) \\ Y &= L_p^{n_y}[0, \infty)\end{aligned}$$

para $p \in \{1, 2, \infty\}$. b) de tiempo continuo asumiremos que

$$\begin{aligned}U &= l_p^{n_u}(Z_{\geq 0}) \\ Y &= l_p^{n_y}(Z_{\geq 0})\end{aligned}$$

para $p \in \{1, 2, \infty\}$. Donde n_u (n_y) representa el número de señales de entrada (salida) del sistema.

Definición 11 Dada una planta P con entrada $u \in U$, con salida $y \in Y$, lineal, invariante en el tiempo, de eje de tiempo T , n -dimensional y la cual tiene las siguientes dos representaciones en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$$

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^{\hat{x}}$$

$A, \hat{A} \in R^{n \times n}, B, \hat{B} \in R^{n \times n_u}, C, \hat{C} \in R^{n_y \times n}, D, \hat{D} \in R^{n_y \times n_u}$.

Se dice que las dos representaciones son **similares o algebraicamente equivalentes** si existe una matriz $Q \in GL_n(R)$, llamada **matriz de similitud o transformación de equivalencia**, tal que

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \\ CQ & D \end{pmatrix}$$

y en cuyo caso se denotará por

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

Más adelante, cuando se tenga un dominio mas completo de conceptos de sistemas, se demostrará que en realidad no hay diferencia entre dos representaciones equivalentes de una planta, y solo cambia el "nombre" de las variables de estados.

Un problema típico que es necesario resolver, es el siguiente: Dadas dos representaciones equivalentes de una misma planta P ,

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$$

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^{\hat{x}}$$

¿Cómo encontrar la matriz de transformación $Q \in GL_n(R)$ que establece la similitud entre ellas?

Una manera ortodoxa de solucionar dicho problema consiste en resolver las siguientes ecuaciones lineales

$$Q\hat{A} = QA$$

$$Q\hat{B} = B$$

$$\hat{C} = CQ$$

Este método para calcular la matriz de transformación Q siempre funciona pero los cálculos son largos y aburridos. Existen otros métodos mas eficientes y que se verán mas adelante.

Ejemplo 12 *Habíamos visto que cuando el torque de carga $T_l = 0$, la planta P : "motor DC controlado por campo" puede ser modelado en variables de estados por*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_f} \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_f} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] x(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

con

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ p\theta(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix}$$

usando el método de variables físicas, o por

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_f M}{J_L L_f} & -\frac{(L_f M + R_f J_L)}{J_L L_f} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{K_T}{J_L L_f} & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + [0] u(t) \end{aligned}$$

con

$$z(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ p\theta(t) \\ p^2\theta(t) \end{bmatrix}$$

empleando el método de variables de fase.

Ahora bien, note que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(t) \\ x_2(t) &= z_2(t) \end{aligned}$$

y por otro lado

$$z_3(t) = p^2\theta(t) = \dot{x}_2(t) = -\frac{M}{J_L}x_2(t) + \frac{K_T}{J_L}x_3(t)$$

o

$$x_3(t) = \frac{M}{K_T}z_2(t) + \frac{J_L}{K_T}z_3(t)$$

y por lo tanto,

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix} z(t)$$

O lo que es lo mismo

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_L} \end{bmatrix} x(t) = Qx(t)$$

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{M}{J_L} & \frac{K_T}{J_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{M}{K_T} & \frac{J_L}{K_T} \end{bmatrix}$$

En resumen, las dos representaciones están relacionadas vía una transformación lineal $z(t) = Qx(t)$ donde $Q \in GL_3(r)$

Los siguientes conceptos serán de suma importancia en el análisis y diseño de sistemas de control.

Definición 13 Sea P una planta n -dimensional, constante, con eje de tiempo T descrita por

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda) \end{aligned}$$

Se define como

1. la matriz de controlabilidad, W_c , de la representación dada a la matriz

$$W_c(P) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in R^{n \times (nn_u)}$$

2. la matriz de observabilidad W_o , de la representación dada a la matriz

$$W_o(P) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in R^{(nn_y) \times n}$$

El proceso de cálculo de las matrices de controlabilidad y de observabilidad de una planta P representada en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$$

se ilustra a continuación.

Ejemplo 14 Considere un sistema P descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [-1 \ 2 \ 1] x \end{aligned}$$

Entonces la matriz de controlabilidad asociada a este sistema será

$$W_c(P) = [B, AB; A^2B]$$

ya que $n = 3$.

Realizando las multiplicaciones matriciales

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Se obtiene que matriz de controlabilidad es

$$W_c(P) = [B, AB; A^2B] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mientras que la matriz de observabilidad del sistema es

$$W_o(P) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

En este punto resulta natural preguntarse ¿Qué sentido tiene introducir cambios en el vector de estados para obtener representaciones similares de un mismo sistema?. La razón de inducir el concepto de representaciones similares es básicamente que seleccionando adecuadamente una matriz Q la representación equivalente puede tener una estructura más sencilla que la original. Dicho punto se demuestra en las secciones anteriores.

Sin embargo, es importante presentar dos últimos resultados que serán de utilidad más adelante.

De inmediato se tiene el siguiente resultado.

Teorema 15 (Controlabilidad) Sea P una planta n -dimensional, constante, descrita por las representaciones en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \quad \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

que son algebraicamente equivalentes. O sea, existe una $Q \in GL_n(R)$ tal : que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

Entonces, las siguientes aseveraciones son ciertas

1. Las correspondientes matrices de controlabilidad están relacionadas por

$$W_c(\hat{P}) = Q.W_c(P)$$

2. Las matrices de controlabilidad $W_c(\hat{P})$ y $W_c(P)$ tienen el mismo rango.

3. Si el sistema P tiene una sola entrada, $n_u = 1$, y $W_c(\hat{P})$ es invertible, entonces la matriz de transformación Q puede determinarse mediante

$$Q = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

Proof. (1) Por hipótesis, las representaciones son algebraicamente equivalentes con $\zeta = Qx$, y $Q \in GL_n(R)$, entonces

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \end{pmatrix}$$

Por otro lado, de la definición de la matriz de controlabilidad,

$$W_c(\hat{P}) = (\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}) \in R^{n \times n_u}$$

Pero note que

$$\begin{aligned} \hat{A}^i \hat{B} &= \underbrace{\hat{A}\hat{A}\cdots\hat{A}}_i \hat{B} = (QAQ^{-1})(QAQ^{-1})\cdots(QAQ^{-1})QB \\ &= QAA\cdots AB = QA^i B \end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \dots$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} W_c(\hat{P}) &= (\hat{B}, \hat{A}\hat{B}, \dots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}) = (QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B) \\ &= Q(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = QW_c(P) \end{aligned}$$

Para demostrar (2), es necesario recordar el teorema de Sylvester que establece que

$$rk(FH) \leq \min[rkF, rkH]$$

y en consecuencia

$$rk(W_c(\hat{P})) = rk[QW_c(P)] \leq \min\{rk(Q), rk(W_c(P))\}$$

En particular

$$rk(W_c(\hat{P})) \leq rk(W_c(P)) \quad (17)$$

Por otro lado, recuerde que $Q \in GL_n(R)$, o sea, Q^{-1} existe. Entonces se tiene que

$$W_c(P) = Q^{-1}W_c(\hat{P})$$

y argumentando de la misma manera se llega que se cumple la desigualdad

$$rk(W_c(P)) \leq rk(W_c(\hat{P})) \quad (18)$$

Por lo tanto, combinando (17) y (18), se demuestra

$$rk(W_c(P)) = rk(W_c(\hat{P}))$$

Finalmente para demostrar (3), note que

a) si P tiene una señal de entrada escalar, entonces la matriz de controlabilidad $W_c(\hat{P}) \in R^{n \times n}$,

b) si $W_c(\hat{P})$ es invertible, entonces $\det[W_c(\hat{P})] \neq 0$.

Empleando la relación

$$\det(FG) = \det(F) \det(G)$$

y el hecho que $\det(Q) \neq 0$, se obtiene que $\det W_c(P) \neq 0$, y $W_c(P)$ es invertible.

Por lo tanto

$$Q = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

Demostrándose de esta manera el teorema. ■

Ejercicio 16 Considere la planta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [-1 \quad 2 \quad 1] x \end{aligned}$$

la cual también puede ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [-4 \quad 3 \quad 0] \zeta \end{aligned}$$

y ambas representaciones son equivalentes.

Entonces

$$W_c(P) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es la matriz de controlabilidad de la primera representación

Mientras que

$$\begin{aligned} W_c(\hat{P}) &= [\hat{B}, \hat{A}\hat{B}; \hat{A}^2\hat{B}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y ya que $\det(W_c(\hat{P})) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$, se obtiene que la matriz de transformación Q tal que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

está dada por

$$\begin{aligned} Q &= W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De manera muy similar (se invita al lector a descubrir las similitudes), se plantea un resultado que involucra la matriz de observabilidad.

Teorema 17 (Observabilidad) *Sea P una planta n -dimensional, constante, descrita por las representaciones en variables de estados*

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n ; \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

que son algebraicamente equivalentes. O sea, existe una $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tal : que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{\zeta=Qx} \hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_\zeta^n$$

Entonces, las siguientes aseveraciones son ciertas

1. Las correspondientes matrices de observabilidad están relacionadas por

$$W_o(\hat{P}) = W_o(P) Q^{-1}$$

2. Las matrices de controlabilidad $W_o(\hat{P})$ y $W_o(P)$ tienen el mismo rango.

3. Si el sistema P tiene una sola salida, $n_y = 1$, y $W_o(\hat{P})$ es invertible, entonces la matriz de transformación Q puede determinarse mediante

$$Q = [W_o(\hat{P})]^{-1} W_o(P)$$

Proof. Se deja como ejercicio. ■

4 Operador de Impulso de Sistemas Representados en Variables de Estados

Considere un sistema P , n -dimensional, constante, con eje de tiempo T , con entrada $u(\lambda)$ y salida $y(\lambda)$

$$y(t) = P[u](t)$$

$u \in U$ e $y \in Y$, $T = [0, \infty)$.

descrita por la representación en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$$

y se conoce que el sistema P en $t = 0$ se encuentra en el estado inicial $x(0)$.

Tomemos la transformada de Laplace de la Ecuación de Estados de P ,

$$\sigma x(\lambda) = Ax(\lambda) + Bu(\lambda)$$

Agrupando en el lado derecho los términos que involucran la transformada de Laplace del vector de estados se obtiene

$$\sigma x(\lambda) - Ax(\lambda) = Bu(\lambda)$$

Factorizando y recordando que x es un vector de dimensión n , se tiene

$$[\sigma I_n - A]x(\lambda) = Bu(\lambda)$$

donde I_n representa la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Por lo tanto, manipulando formalmente el lado izquierdo de la igualdad, se obtiene que

$$x(\lambda) = [\sigma I_n - A]^{-1} Bu(\lambda) \tag{19}$$

Sustituyendo la expresión (19) en la ecuación de salida de la representación dada

$$y(\lambda) = Cx(\lambda) + Bu(\lambda)$$

llegamos a una expresión operacional de la salida en términos de la señal de entrada del sistema:

$$y(\lambda) = \left\{ C [\sigma I_n - A]^{-1} B + D \right\} u(\lambda)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} y(\lambda) &= h_P(\sigma) u(\lambda) \\ h_P(\sigma) &= \left\{ C [\sigma I_n - A]^{-1} B + D \right\} \end{aligned} \tag{20}$$

donde $h(\sigma)$ se denomina **el operador de impulso** del sistema $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$.

Noten que (20) se puede interpretar como una representación entrada-salida de la planta P :

$$G : U \rightarrow Y : u \mapsto y(\lambda) = h_P(\sigma) u(\sigma)$$

Recordando la Fórmula de Laplace para determinantes es posible demostrar que la matriz puede expresarse como

$$[\sigma I_n - A]^{-1} = \frac{Adj[\sigma I_n - A]}{\det(\sigma I_n - A)}$$

donde:

- la matriz $Adj[\sigma I_n - A] \in R^{n \times n}[\sigma]$ es la **adjunta** de $[\sigma I_n - A]$ y la cual es una matriz cuyos elementos son polinomios reales en σ con grados menor o igual a $n - 1$.
- $\chi_A(\sigma) = \det(\sigma I_n - A)$ es el polinomio característico del sistema P : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$, el cual es un polinomio de coeficientes reales de grado n (la dimensión del sistema P).

Por lo tanto,

$$h_P(\sigma) = \frac{C Adj[\sigma I_n - A] B + D \chi_A(\sigma)}{\chi_A(\sigma)} \in R^{n_y \times n_u}(\sigma)$$

en consecuencia, cada elemento $g_{ij}(\sigma)$ de $h_P(\sigma)$ es una función racional real en σ ; o sea,

$$h_P(\sigma) = [h_{ij}(\sigma)]_{n_y \times n_u}$$

con

$$h_{ij}(\sigma) = \frac{n_{ij}(\sigma)}{d_{ij}(\sigma)} \in R(\sigma)$$

y $n_{ij}(\sigma), d_{ij}(\sigma) \in R[\sigma]$, y $\deg[d_{ij}] \leq \deg[n_{ij}]$, en cuyo caso, se dice que $G_p(\sigma)$ es **propia**. Cuando $D = 0$, la desigualdad es estricta y se dice que la función de transferencia $G_P(\sigma)$ es **estrictamente propia**.

Ejemplo 18 Un sistema P escalar (siso) y eje de tiempo T , está descrito en variables de estados por $P \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^3$ con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = 0$$

Entonces, el polinomio característico del sistema es

$$\begin{aligned}\chi_A(\sigma) &= \det[\sigma I_3 - A] \\ &= \det \begin{bmatrix} \sigma + 5 & -1 & 0 \\ 0 & \sigma + 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sigma + 2 \end{bmatrix} = (\sigma + 5)(\sigma + 2)^2 \\ &= \sigma^3 + 9\sigma^2 + 24\sigma + 20\end{aligned}$$

mientras que la matriz resolvente del sistema es

$$\begin{aligned}[\sigma I_3 - A]^{-1} &= \frac{\text{adj}[\sigma I_3 - A]}{\chi_A(\sigma)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} (\sigma + 2)^2 & \sigma + 2 & 1 \\ 0 & (\sigma + 2)(\sigma + 5) & \sigma + 5 \\ 0 & 0 & (\sigma + 2)(\sigma + 5) \end{bmatrix}}{(\sigma + 5)(\sigma + 2)^2}\end{aligned}$$

y finalmente, la función de transferencia $h_P(\sigma)$ de la representación de P será

$$\begin{aligned}h_P(\sigma) &= \frac{C \text{Adj}[\sigma I_n - A] B}{\chi_A(\sigma)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\sigma + 2)^2 & \sigma + 2 & 1 \\ 0 & (\sigma + 2)(\sigma + 5) & \sigma + 5 \\ 0 & 0 & (\sigma + 2)(\sigma + 5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{(\sigma + 5)(\sigma + 2)^2} \\ &= \frac{N(\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{\sigma + 3}{(\sigma + 5)(\sigma + 2)^2}\end{aligned}$$

Los ceros del operador de impulso $h_P(\sigma)$, son las raíces del polinomio numerador $N(\sigma)$, son $\{0\}$; mientras que sus polos, son las raíces del polinomio $D(\sigma)$, y que son $\{-2, -2, -5\}$.

El operador de impulso $h_P(\sigma)$ es estrictamente propio ya que $\deg[N] = 1 \leq 3 = \deg[D]$. Y el sistema P tiene la representación Entrada /Salida

$$\begin{aligned}D(\sigma) y(\lambda) &= N(\sigma) u(\lambda) \\ [(\sigma + 5)(\sigma + 2)^2] y(\lambda) &= (\sigma + 3) u(\lambda) \\ (\sigma^3 + 9\sigma^2 + 24\sigma + 20) y(\lambda) &= (\sigma + 3) u(\lambda)\end{aligned}$$

Si el sistema es de tiempo continuo el sistema P tiene la siguiente representación externa

$$\begin{aligned}(\sigma^3 + 9\sigma^2 + 24\sigma + 20) y(t) &= (\sigma + 3) u(t) \\ \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 9 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 24 \frac{d}{dt} y(t) + 20 y(t) &= \frac{d}{dt} u(t) + 3u(t)\end{aligned}$$

con $t \in R$. Mientras que si es de tiempo discreto, entonces la correspondiente ecuación Entrada/Salida se convierte en

$$\begin{aligned} (\sigma^3 + 9\sigma^2 + 24\sigma + 20)y(k) &= (\sigma + 3)u(k) \\ y(k+3) + 9y(k+2) + 24y(k+1) + 20y(k) &= u(k+1) + 3u(k) \end{aligned}$$

con $k \in Z$.

5 Polos y Ceros de Representaciones en V.E.'s de Sistemas Lineales

A continuación presentaremos las definiciones formales de polos y ceros relacionados con sistemas lineales descritos por modelos en variables de estados. A dichos conceptos se les asignarán posteriormente un significado físico bien definido.

Pero antes se requiere recordar una serie de conceptos de álgebra lineal.

Definición 19 1. Un **autovalor** de una matriz A ($n \times n$) es un escalar $\gamma \in C$ tal que permite encontrar una solución no trivial ($v \neq 0$) a la ecuación

$$Av = \gamma v$$

El conjunto de todos los autovalores de A se denota por $\sigma(A)$ y se denomina **espectro** de A .

2. El polinomio característico de A es $\chi_A(\gamma) = \det(\gamma I_n - A) = \gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \dots + a_1\gamma + a_0$

Note que la ecuación que define los autovalores de la matriz A puede representarse como

$$(\lambda I_n - A)v = 0$$

Las soluciones no triviales v existen solo si $\det(\gamma I_n - A) = 0$, de lo contrario $(\gamma I_n - A)^{-1}$ existiría para determinar que $v = 0$. En consecuencia:

- Los autovalores de una matriz A son las raíces de su polinomio característico.
- Ya que $\chi_A(\gamma) = \det(\gamma I_n - A)$ es un polinomio de grado n , entonces la ecuación característica $\chi_A(\gamma) = 0$ tiene n raíces. Por lo tanto,

$$\sigma(A) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$$

donde

$$\gamma = \begin{cases} s, & \lambda = t, \\ z, & \lambda = k. \end{cases}$$

Ejemplo 20 Encuentre los autovalores de $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. La ecuación de autovalores es

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea

$$\begin{bmatrix} \gamma - 3 & -4 \\ -1 & \gamma - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica será

$$\det \begin{bmatrix} \gamma - 3 & -4 \\ -1 & \gamma - 3 \end{bmatrix} = \gamma^2 - 6\gamma + 5 = (\gamma - 1)(\gamma - 5)$$

En consecuencia

$$\sigma(A) = \{1, 5\}$$

Definición 21 Asociado a cada autovalor $\gamma_i \in \sigma(A)$, existe una solución no nula v_i a la ecuación de autovalores $Av = \gamma_i v_i$. A esta solución vectorial v_i se le denomina **autovector** asociado a γ_i .

Ejemplo 22 En el ejemplo anterior, un autovector asociado al autovalor $\gamma = 1$ se encuentra de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \gamma - 3 & -4 \\ -1 & \gamma - 3 \end{bmatrix}_{\gamma=1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea, hay que resolver

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea, se obtienen dos ecuaciones equivalentes

$$\begin{aligned} -2v_1 - 4v_2 &= 0 \\ -v_1 - 2v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, todo autovalor $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ asociado a $\gamma = 1$ debe ser tal que $v_1 = -2v_2$. Por lo tanto,

$$v = \begin{bmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

con $v_2 \neq 0$.

Y debe concluirse que existe un número infinito de autovectores asociados a un autovalor. En el caso estudiado, un posible autovector es

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definición 23 Considere una planta P con entrada $u \in U$, con salida $y \in Y$, lineal, invariante en el tiempo, con eje de tiempo T y n -dimensional cuyo comportamiento dinámico está descrito por

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda)\end{aligned}$$

donde $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n_u}$, $C \in R^{n_y \times n}$, $D \in R^{n_y \times n_u}$.

Se define como el polinomio característico de la representación $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{x}^n$ al polinomio característico de la matriz n -dimensional A . O sea,

$$\chi_A(\gamma) = \det[\gamma I_n - A]$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Ejemplo 24 Sea P una planta de tiempo continuo, escalar y descrita por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, a_3 \in R$. Entonces el polinomio característico de P está dado por

$$\begin{aligned}\chi_A(s) &= \det[sI_3 - A] = \det \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \det \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ a_3 & a_2 & s + a_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\chi_A(s) = s^2(s + a_1) + a_3 + a_2s = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 \in R[s]$$

donde $R[s]$ representa al conjunto de todos los polinomios de coeficientes reales en la variable indeterminada s .

Comentarios Es fácil comprobar las siguientes propiedades de los polinomios característicos de los sistemas:

- Si la matriz A tiene la estructura de Frobenius, o sea,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

entonces su polinomio característico es

$$\chi_A(\gamma) = \det[\gamma I_n - A] = \gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\gamma + a_n$$

- Recordando el hecho que $\det(A) = \det(A')$ ($(\cdot)'$ = operación de transposición de matrices), entonces es evidente que

$$\chi_A(\gamma) = \chi_{A'}(\gamma)$$

- Si la matriz A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\chi_A(\gamma) = \det[\gamma I_n - A] = \gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\gamma + a_n$$

Definición 25 Considere una planta P con entrada $u \in U$, con salida $y \in Y$, lineal, invariante en el tiempo, de tiempo continuo y n -dimensional cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda) \end{aligned}$$

donde $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n_u}$, $C \in R^{n_y \times n}$, $D \in R^{n_y \times n_u}$.

Se denominan polos de la representación $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ a las raíces del polinomio característico $\chi_A(\gamma)$. O sea, $\gamma_0 \in C$, es un polo si y solo si $\chi_A(\gamma)_{\gamma=\gamma_0} = 0$.

Los polos de un sistema son los parámetros de este que determinan su comportamiento o evolución dinámica en el tiempo. Por lo tanto, es sumamente importante entender su significado físico, y el cual se postpone hasta el momento en que se estudie la estabilidad de sistemas dinámicos.

Ejemplo 26 Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura (5)

La entrada $u(t)$ es el voltaje aplicado; mientras que la salida es $y(t)$ es el voltaje en la resistencia R_2 .

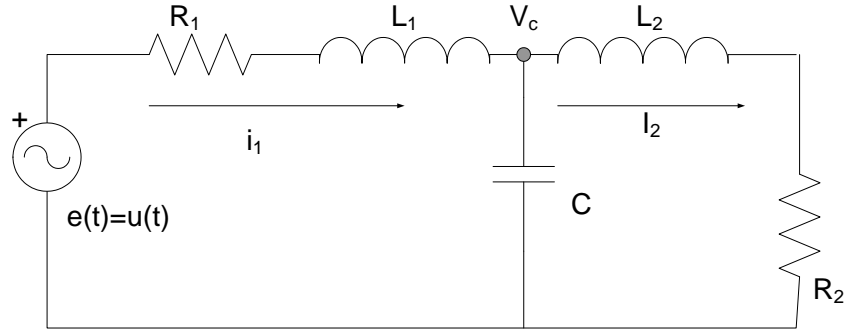
Aplicando la técnica de variables físicas o de elementos almacenadores de energía, se definen las siguientes variables de estados:

Elementos almacenadores de energía Variables de estado asociada

$$\begin{array}{ll} L_1 & x_1 = i_1(t) \\ L_2 & x_2 = i_2(t) \\ C & x_3 = v_c(t) \end{array}$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff

$$\begin{aligned} R_1 x_1(t) + L_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + x_3(t) &= e(t) \\ -x_3(t) + L_2 \frac{dx_2(t)}{dt} + R_2 x_2(t) &= 0 \\ -x_1(t) + x_2(t) + C \frac{dx_3(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$



En consecuencia, las ecuaciones de estados son

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{-R_1}{L_1}x_1(t) + 0x_2(t) - \frac{1}{L_1}x_3(t) + \frac{1}{L_1}u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0x_1(t) - \frac{R_2}{L_2}x_2(t) + \frac{1}{L_2}x_3(t) + 0u(t) \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + 0x_3 + 0u(t)\end{aligned}$$

Mientras que las ecuación de salida es

$$y(t) = R_2x_2 + 0u(t)$$

Por lo tanto, la representación de la planta en variables de estados son:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0u(t)\end{aligned}$$

y el polinomio característico del sistema será

$$\begin{aligned}\chi_A(s) &= \det[sI_3 - A] = \det \begin{pmatrix} s + \frac{R_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s + \frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{pmatrix} \\ &= s \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_1 C} \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_2 C} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right)\end{aligned}$$

Expandiendo y agrupando se obtiene

$$\chi_A(s) = \chi_A(s, q) = s^3 + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) s^2 + \left(\frac{1}{CL_1} + \frac{1}{CL_2} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) s + \left(\frac{R_1}{CL_1 L_2} + \frac{R_2}{CL_1 L_2} \right)$$

con $q = (R_1, R_2, L_1, L_2, C)^{Tr}$, donde generalmente

$$\begin{aligned} R_{1,\min} &\leq R_1 \leq R_{1,\max} \\ R_{2,\min} &\leq R_2 \leq R_{2,\max} \\ L_{1,\min} &\leq L_1 \leq L_{1,\max} \\ L_{2,\min} &\leq L_2 \leq L_{2,\max} \\ C_{\min} &\leq C \leq C_{\max} \end{aligned}$$

y por lo tanto, los polos del sistemas (las raíces del polinomio característicos) cumplen con

$$p_i = p_i(q) : i = 1, 2, 3.$$

Esto es, los polos del sistema son funciones de los parámetros que caracterizan a los elementos de la planta.

Definición 27 Considere una planta P con entrada $u \in U$, con salida $y \in Y$, lineal, invariante en el tiempo, eje de tiempo T y n -dimensional cuyas ecuaciones dinámicas son

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= Ax(\lambda) + Bu(\lambda) \\ y(\lambda) &= Cx(\lambda) + Du(\lambda) \end{aligned}$$

donde $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n_u}$, $C \in R^{n_y \times n}$, $D \in R^{n_y \times n_u}$.

Se denominan ceros de la representación $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ a todo $\zeta \in C$ tal que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \zeta I_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} < n + \min\{n_u, n_y\}$$

En el caso escalar, $n_u = n_y = 1$, entonces es evidente que $\zeta \in C$ es un cero de

$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ si y solo si

$$\det \begin{pmatrix} \zeta I_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplo 28 Sea P un sistema descrito por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + 0 \cdot u(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\zeta I_n - A = \begin{pmatrix} \zeta & -1 \\ 1 & \zeta + 2 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\det \begin{pmatrix} \zeta I_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \zeta & -1 & 0 \\ 1 & \zeta + 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + \zeta$$

cuya única raíz es $z = -2$ el cual por definición es el cero de la representación

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^2.$$

Las representaciones similares de una planta son interesantes por que contienen la misma información sobre el comportamiento dinámico de esta, como se muestra a continuación.

Teorema 29 Sea P una planta con entrada $u \in U = (L_2[0, \infty))^{n_u}$, con salida $y \in Y = (L_2[0, \infty))^{n_y}$, lineal, invariante en el tiempo, eje de tiempo T y n -dimensional. Suponga además que la siguientes dos representaciones en variables de estados

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{x, y}^n$$

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_{z, y}^n$$

$A, \hat{A} \in R^{n \times n}, B, \hat{B} \in R^{n \times n_u}, C, \hat{C} \in R^{n_y \times n}, D, \hat{D} \in R^{n_y \times n_u}$ de la planta son similares. Entonces:

1. Los polinomios característicos de ambas representaciones son iguales, o sea

$$\chi_A(\gamma) = \chi_{\hat{A}}(\gamma)$$

2. Los polos de $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ coinciden con los polos de $\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^n$
3. Los ceros de $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n$ coinciden con los ceros de $\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_z^n$

Proof. Como las representaciones son similares, existe una matriz $Q \in GL_n(R)$ tal que

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \\ CQ & D \end{pmatrix}$$

a) Por definición

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{A}}(\gamma) &= \det(\gamma I_n - \hat{A}) = \det(\gamma I_n - QAQ^{-1}) \\ &= \det(\gamma QQ^{-1} - QAQ^{-1}) = \det[Q(\gamma I_n - A)Q^{-1}] \end{aligned}$$

y recordando de álgebra lineal que

$$\begin{aligned} \det(PQ) &= \det P \cdot \det Q \\ \det(Q^{-1}) &= \frac{1}{\det(Q)} \text{ si } \det(Q) \neq 0 \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \chi_{\hat{A}}(s) &= \det[Q(sI_n - A)Q^{-1}] \\ &= \det(Q) \det(sI_n - A) \det(Q^{-1}) = \det(sI_n - A) = \chi_A(s) \end{aligned}$$

b) Inmediata consecuencia de (a)

c) La parte correspondiente a los ceros es un poco más delicada; solo note que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \zeta I_n - \hat{A} & -\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta I_n - Q A Q^{-1} & -Q B \\ C Q^{-1} & D \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \zeta Q Q^{-1} - Q A Q^{-1} & -Q B \\ C Q^{-1} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q (\zeta I_n - A) Q^{-1} & -Q B \\ C Q^{-1} & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado observe que

$$\begin{pmatrix} Q (\zeta I_n - A) Q^{-1} & -Q B \\ C Q^{-1} & D \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{invertible}} \begin{pmatrix} \zeta I_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{invertible}}$$

y recordando que

$$\text{rank}(QP) = \text{rank}(P) \text{ si } Q^{-1} \text{ existe}$$

entonces es claro que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \zeta I_n - \hat{A} & -\hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \zeta I_n - A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

y como consecuencia los ceros de ambas representaciones coinciden. ■

6 Representaciones Canónicas de Sistemas Lineales

Mediante la selección adecuada de la matriz de similaridad es posible encontrar representaciones equivalentes de un mismo sistema que son de estructura muy sencilla y adecuada para resolver ciertos tipos de problemas de control. A continuación se presentan ciertas representaciones canónicas que son útiles en el estudio y diseño de sistemas dinámicos escalares.

6.1 Forma canónica de Controlabilidad

Esta forma particular de las representaciones en variables de un sistema es de suma utilidad teórica, y de vital importancia para entender el problema y la solución del problema de reubicación de polos de sistemas lineales.

Definición 30 Se dice que una planta dada, P , escalar, invariante en el tiempo, n -dimensional y continua con entrada $u(\cdot)$ y salida $y(\cdot)$ está descrita en variables de estados en forma canónica de controlabilidad si su comportamiento dinámico representarse por

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= A_c x(\lambda) + B_c u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C_c x(\lambda) + D_c u(\lambda) \end{aligned}$$

donde

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y las matrices C_c, D_c no tienen estructura particular, o sea,

$$C_c = (c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1})$$

$$D_c = d$$

De inmediato se concluye que la representación en forma canónica en forma de controlabilidad en variables de estados está muy relacionado con la representación de un sistema mediante las variables de fase. Es importante resaltar la palabra "relacionada" y no se puede decir que son idénticas como se ilustra a continuación en siguientes ejemplos.

Pero antes, recuerde que dos polinomios $\pi(\gamma)$ y $\varpi(\gamma)$ se dicen ser coprimos entre sí, si no tienen factores comunes. En consecuencia, la función racional

$$\frac{\pi(\gamma)}{\varpi(\gamma)}$$

se dice ser irreducible.

Ejemplo 31 La planta P descrita por la ecuación entrada salida

$$(\sigma^3 + 4\sigma^2 + \sigma - 6)y(t) = (2\sigma^2 + 4\sigma - 3)u(t)$$

entonces la representación en variables de fase de este sistema será (ver (16)) será

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-3 \quad 4 \quad 2] x(t)$$

y la cual cumple con la definición de forma canónica de controlabilidad. En este caso ya que los polinomios

$$D(\sigma) = (\sigma^3 + 4\sigma^2 + \sigma - 6)$$

$$N(\sigma) = (2\sigma^2 + 4\sigma - 3)$$

son coprimos entre sí, se tiene que la forma canónica de controlabilidad coincide con la representación en variables de fase.

Ejemplo 32 Considere ahora la planta P descrita por la ecuación entrada /salida

$$\underbrace{(\sigma^2 + 4\sigma + 2)}_{D(\sigma)} y(t) = \underbrace{(\sigma + 2)}_{N(\sigma)} u(t)$$

la correspondiente descripción de en variables de fase será

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Sin embargo, como

$$D(\sigma) = N(\sigma) u(t)$$

es equivalente a

$$(\sigma + 2) y(t) = u(t) \tag{21}$$

Se tiene que la correspondiente representación en forma canónica de controlabilidad es

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -2z(t) + u(t) \\ y(t) &= z(t) \end{aligned}$$

Noten que son diferentes. Esto se debe a la cancelación que se realizó en la deducción de la ecuación (21).

Por lo tanto: "Para hallar la representación en forma canónica de controlabilidad de una planta descrita por

$$D(\sigma) y(t) = N(\sigma) u(t)$$

es necesario que $\frac{N(\sigma)}{D(\sigma)}$ sea irreducible."

Suponga ahora que se conoce la forma canónica de controlabilidad de una planta P (en cuyo proceso de deducción no se ha incurrido en cancelación alguna)

$$\begin{aligned} \sigma z(\lambda) &= A_c z(\lambda) + B_c u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C_c z(\lambda) + D_c u(\lambda) \end{aligned}$$

y cuya representación original está dada por el siguiente modelo n -dimensional

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= A x(\lambda) + B u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C x(\lambda) + D u(\lambda) \end{aligned}$$

La pregunta natural es entonces ¿Cuál es la matriz de similaridad $Q_c \in GL_n(R)$

tal que $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^n \xrightarrow{z=Q_c x} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_z^n$?, ¿Existe tal matriz?.

Si

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_x^n$$

entonces la matriz de controlabilidad está dada por

$$W_c(\hat{P}) = [B_c, B_c A_c, \dots, B_c A_c^{n-1}]$$

o sea

$$(W_c(\hat{P})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * & * \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

y en consecuencia $\det(W_c(\hat{P})) \neq 0$. Por lo tanto, para un sistema en forma canónica de controlabilidad, la matriz de controlabilidad $W_c(\hat{P})$ siempre es invertible independientemente de los valores de la fila

$$[-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_{n-2} \quad -a_{n-1}]$$

Empleando el teorema (15), se concluye que la matriz de equivalencia que transforma a la representación de un sistema a la forma canónica de controlabilidad es

$$Q_c = W_c(\hat{P}) [W_c(P)]^{-1}$$

6.2 Forma canónica de Observabilidad

Esta forma particular de las representaciones en variables de un sistema, es de suma utilidad teórica y de vital importancia para entender y resolver el problema de construcción de observadores o estimadores de estados para sistemas lineales.

Definición 33 *Se dice que una planta dada, P , escalar, invariante en el tiempo, n -dimensional, eje de tiempo T y con entrada $u(\cdot)$ y salida $y(\cdot)$ está descrita en variables de estados en forma canónica de observabilidad si su comportamiento dinámico está representado por*

$$\begin{aligned} \sigma x(\lambda) &= A_o x(\lambda) + B_o u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C_o x(\lambda) + D_o u(\lambda) \end{aligned}$$

donde

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_o = (0 \ 0 \ \dots \ 1)$$

$$D_o = d$$

las matrices B_o, D_o no tienen estructura particular.

Ejemplo 34 Una planta P , lineal, constante y de tiempo discreto, está descrita por

$$[2\sigma^3 + 12\sigma^2 + 20\sigma + 16] y(k) = [4\sigma^3 + 25\sigma^2 + 45\sigma + 34] u(k)$$

con los polinomios $D(\sigma) = 2\sigma^3 + 12\sigma^2 + 20\sigma + 16$ y $N(\sigma) = 4\sigma^3 + 25\sigma^2 + 45\sigma + 34$, en $R[\sigma]$ son coprimos entre si.

Entonces

$$\frac{N(\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{0.5\sigma^2 + 2.5\sigma + 1}{\sigma^3 + 6\sigma^2 + 10\sigma + 8} + 2$$

y la representación en forma canónica de controlabilidad es

$$x_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -10 & -6 \end{bmatrix} x_c(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \ 2.5 \ 0.5] x_c(k) + 2u(k)$$

Mientras la representación en forma canónica de observabilidad es

$$x_o(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x_o(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ 1] x_o(k) + 2u(k)$$

para todo $k \in Z$.

Supongamos que conocemos la forma canónica de observabilidad de una planta P cuya representación original está dada por el siguiente modelo n -dimensional

$$\sigma x(\lambda) = Ax(\lambda) + Bu(\lambda)$$

$$y(\lambda) = Cx(\lambda) + Du(\lambda)$$

La pregunta natural es entonces ¿Cuál es la matriz de similitud $Q_o \in GL_n(R)$

$$\text{tal que } P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Q_o z} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix}_x^n ?$$

Si

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix}_x^n$$

entonces la matriz de observabilidad está dada por

$$W_o(\hat{P}) = \begin{bmatrix} C_o \\ C_o A_o \\ C_o A_o^2 \\ \vdots \\ C_o A_o^{n-1} \end{bmatrix}$$

o sea

$$(W_o(\hat{P})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & * & * \\ 1 & -a_{n-1} & a_{n-1}^2 - a_{n-2} & \cdots & * & * \end{bmatrix}$$

y en consecuencia $\det(W_o(\hat{P})) \neq 0$. Por lo tanto, para un sistema en forma canónica de observabilidad, la matriz de observabilidad $W_o(\hat{P})$ siempre es invertible independientemente de los valores de la columna

$$\begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \cdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Empleando el teorema (17), se concluye que la matriz de equivalencia que transforma a la representación de un sistema a la forma canónica de observabilidad es

$$Q_o = [W_o(\hat{P})]^{-1} W_o(P)$$

6.3 Diagonalización de Sistemas o Forma Canónica de Jordan

La siguiente forma canónica es de suma utilidad para motivar el concepto de polo de un sistema dinámico y para realizar análisis de estabilidad.

Definición 35 *Se dice que una planta dada, P , escalar, invariante en el tiempo, n -dimensional, continua, con todos sus polos diferentes entre sí, con entrada $u(\cdot)$ y salida $y(\cdot)$ está descrita en variables de estados en forma canónica de*

Jordan (también se dice que está diagonalizada) si su comportamiento dinámico está representado por

$$\begin{aligned}\sigma x(\lambda) &= A_d x(\lambda) + B_d u(\lambda) \\ y(\lambda) &= C_d x(\lambda) + D u(\lambda)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A_d &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \\ C_d &= (\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_n) \\ D_d &= d\end{aligned}$$

Estos es, la matriz A_d es diagonal.

Siguiendo la misma línea de razonamiento que en casos anteriores, debe responderse la pregunta. ¿Cuál es la matriz de similaridad $Q \in GL_n(R)$ tal que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Qz} \hat{P} : \begin{pmatrix} A_d & B_d \\ C_d & D_d \end{pmatrix}_x^n$$

Suponga que los polos de $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n$ son diferentes entre si, o sea, el espectro de A (el conjunto de polos de P):

$$\sigma(A) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \subset C$$

es tal que $\gamma_i \neq \gamma_j$ si $i \neq j$.

Por definición, a cada polo $\gamma_i \in \sigma(A)$, le corresponde un autovector $v_i \in C^n$ tal que:

$$A v_i = \gamma_i v_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces la matriz de similaridad Q que diagonaliza el sistema está dada por

$$Q^{-1} = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (22)$$

Esto es fácil de constatar, ya que si Q está definida por (22) e introduciendo el cambio de vector de estado

$$x(\lambda) = Qz(\lambda)$$

entonces sabemos que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n \xrightarrow{x=Qz} \bar{P} : \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix}_x^n$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{A} &= QAQ^{-1} \\ \bar{B} &= QB \\ \bar{C} &= CQ^{-1} \\ \bar{D} &= D\end{aligned}$$

Y entonces

$$\bar{A} = \underbrace{[v_1, v_2, \dots, v_n]^{-1}}_Q A \underbrace{[v_1, v_2, \dots, v_n]}_{Q^{-1}}$$

Pero

$$\begin{aligned}A[v_1, v_2, \dots, v_n] &= [Av_1, Av_2, \dots, Av_n] = [\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2, \dots, \gamma_n v_n] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{A} = QAQ^{-1} &= [v_1, v_2, \dots, v_n]^{-1} [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)\end{aligned}$$

Por lo que las nuevas ecuaciones de estados se convierten en

$$\begin{aligned}\frac{dz(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] z(t)\end{aligned}$$

la cual es la forma canónica de Jordan para la planta P .

Ejemplo 36 Considere una planta descrita por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [3 \quad -1] x(t) + 2u(t)\end{aligned}$$

En este caso, los polos del sistema son $\sigma(A) = \{1, 5\}$.

Mientras que los autovectores son a) $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al polo $\lambda = 1$, b)
 $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al polo $\lambda = 5$. Por lo tanto

$$Q^{-1} = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\hat{B} = QB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CQ^{-1} = [3 \ -1] \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-7 \ 5]$$

$$\hat{D} = D = 2$$

Y la forma canónica de Jordan del sistema dado es

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-7 \ 5] z(t) + 2u(t)$$

Ejercicio 37 Para el circuito RL – RC mostrado en la figura (2) determine:

- Las Ecuaciones en Variables de Estados del Sistema $P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_z^n$,
- El operador de impulso del Sistema, $h_P(\sigma)$.
- Determine otra representación en variables de estados de P pero ahora sólo empleando

$$h_P(\sigma) = \frac{N(\sigma)}{D(\sigma)}$$

Ejercicio 38 Frecuentemente en los edificios de concreto armado surge dinámica debido a la flexibilidad y al doblamiento de muchos de su elementos que se suponen rígidos. Un caso extremo de sumo interés es el comportamiento de edificios sujetos a movimientos sísmicos y/o a fuertes ráfagas de vientos. La ingeniería de control está estudiando este tipo de sistemas para controlar la flexibilidad de los edificios durante terremotos. En este ejercicio se examine el modelo de un edificio de un piso como el que se muestra en la figura (6.3). El edificio se modela como una fundación conectada mediante paredes a la masa del primer

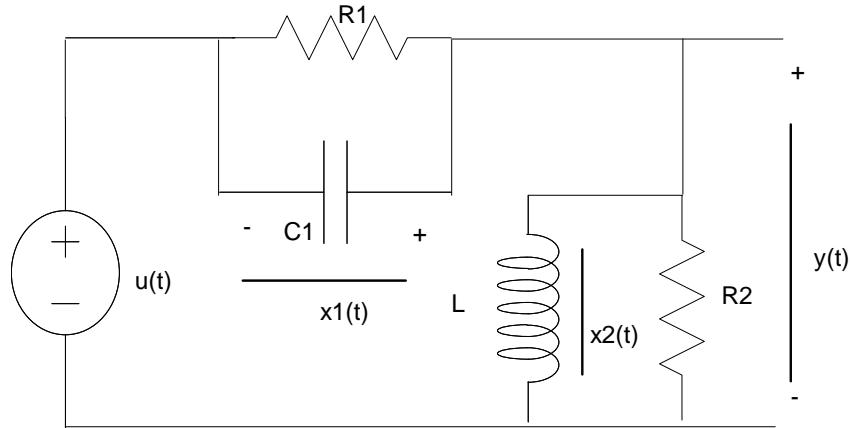


Figure 2: x_1, x_2 son las variables de estados

piso, m_1 . Denote por z_1 el desplazamiento del primer piso con respecto al centro del mismo debido al doblamiento de la estructura debido al viento a un terremoto. Las paredes entre los dos pisos generan fuerzas restaurativas y también se produce un amortiguamiento debido a la resistencia del aire que rodea al edificio. Una gran masa m_2 , con un resorte, un amortiguador y un motor se interconectan con el objeto de controlar las oscilaciones del edificio. Denote por z_2 la desviación de la masa m_2 con respecto al mismo punto de referencia empleado para medir z_1 . Las ecuaciones del movimiento del edificio son

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} z_1(t) &= -B_1 \frac{d}{dt} z_1(t) - K_1 z_1(t) + K_2 [z_2(t) - z_1(t)] \\ m_2 \frac{d^2}{dt^2} z_2(t) &= -B_2 \frac{d}{dt} z_2(t) - K_2 [z_2(t) - z_1(t)] + u(t) \end{aligned}$$

donde $u(t)$ es la fuerza generada por el motor sobre la masa m_2 .

Valores representativos (nominales) para los parámetros son $m_1 = 100$, $m_2 = 1$, $K_1 = 100$, $K_2 = 10000$, $B_1 = 1$, y $B_2 = 200$. Use estos valores para resolver cada una de las partes de este ejercicio.

1. Use los valores numéricos dados para los parámetros excepto para K_2 , determine el modelo en variables de estados para este sistema empleando el siguiente vector de estado

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & \dot{z}_1 & z_2 & \dot{z}_2 \end{pmatrix}^{Tr}$$

la salida es $y = z_1$, y la entrada es la fuerza generada por el motor u .

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x^4$$

Las matrices correspondientes aparecerán como función de K_2 . Encuentre los polos y ceros del sistema para el caso $K_2 = 0$. El par de polos complejos conjugados con una pequeña parte real indica que si el edificio se deja solo, éste entrará en oscilaciones peligrosas. Confirme esta apreciación mediante la simulación de la ecuación

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} z_1(t) = -B_1 \frac{d}{dt} z_1(t) - K_1 z_1(t)$$

(correspondiente al edificio sin compensación) con $z_1(0)$ un valor cualquiera no nulo.

Encuentre nuevamente los polos y los ceros del sistema cuando $K_2 = 10000$. El hecho que ahora todos los polos son reales indican que la oscilación ha sido eliminada mediante el contrapeso m_2 aún cuando el motor está inactivo. Mediante un control adecuado (por ejemplo, realimentación lineal de las variables de estados) es posible mejorar la respuesta del edificio. Para el resto del problema suponga que $K_2 = 10000$.

2. Un conjunto de variables de estados más fáciles de medir son

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 & w_2 &= \dot{z}_1 \\ w_3 &= z_2 - z_1 & w_4 &= \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{aligned}$$

Use una transformación lineal para encontrar la representación en variables de estados equivalentes

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_w$$

3. Empleando la representación anterior, determine la ecuación diferencial entrada-salida de la planta

$$P(p)y(t) = Q(p)u(t)$$

y luego encuentre la representación en variables de fase de esta planta.

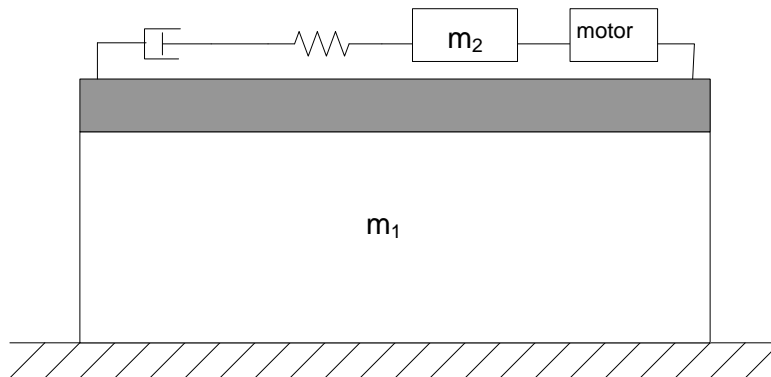
$$P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta$$

4. Encuentre la matriz de transformación de equivalencia Q_c tal que

$$\hat{P} : \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}_w \xrightarrow{\zeta=Q_c w} P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta$$

y la matriz de transformación Q_e tal que

$$P : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_x \xrightarrow{x=Q_e w} P : \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}_\zeta$$



Ejercicio 39 Considere la planta P descrita por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 4u(t) \end{aligned}$$

1. Determine el polinomio característico del sistema.
2. Determine los polos y ceros de la representación en variables de estados dada.
3. a) Halle la matriz de controlabilidad del sistema, b) Determine la forma canónica de controlabilidad (FCC) del sistema y la correspondiente matriz de transformación Q_c que transforma el sistema original en la representación en FCC.
4. a) Halle la matriz de observabilidad del sistema, b) Determine la forma canónica de observabilidad (FCO) del sistema y la correspondiente matriz de transformación Q_o que transforma el sistema original en la representación en FCO.
5. Halle una matriz de transformación Q que diagonalice al sistema.

References

1. Grantham, W. y T. Vincent. "Sistemas de Control Moderno: Análisis y Diseño". Limusa. Noriega Editores. Mexico. 1998.
2. Raven, F. "Automatic Control Engineering". McGraw-Hill, New York. 1978.
3. D'azzo, J.J y C.J. Houpis, "Linear Control System Analysis and Design". McGraw-Hill, New York. 1995.
4. Lewis, F.L, C. Abdallah y D.M. Dawson, "Control of robot Manipulators ". MacMillan Publishing Company, New York. 1993.
5. Umez-Eronini, E."2 Dinámica de Sistemas y Control". Thomson Learning. México.2001.
6. Netushil.A (Ed). "Theory of Automatic Control". Mir Publishers. Moscú. 1973.
7. Meisel, J. "Principios de Conversión de Energía Electromecánica". McGraw-Hill, New York. 1969.